# L'actualité des nombres

BULLETIN MATHÉMATIQUE À PARUTION ALÉATOIRE

N° 2 - ÉDITION DU COLLÈGE LA CHARME | SPÉCIAL MÉDAILLES FIELDS | JUIN 2007

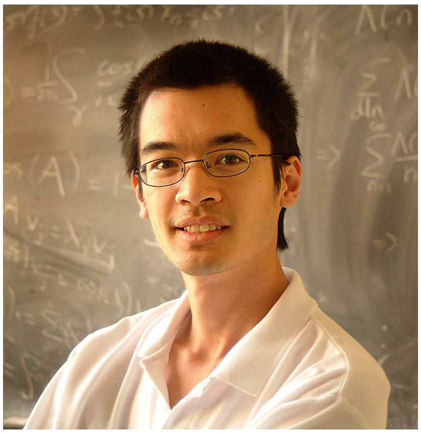

## UN FRANÇAIS MÉDAILLE FIELDS 2006

Wendelin Werner, 38 ans, est le huitième français à recevoir la prestigieuse médaille Fields. Avec l'autre lauréat, Andrei Okounkov, il est le premier probabiliste à être récompensé par le jury.
« *L'image des probabilités a changé. Les idées probabilistes deviennent importantes dans d'autres branches des mathématiques* », constate le jeune lauréat, professeur à l'université Paris-Sud Orsay et à l'École Normale Supérieure.
« *Ça me fait drôle d'être le premier car d'autres avant moi étaient certainement au moins aussi méritants* », ajoute-t-il.

En effet, **les probabilités** sont au coeur de notre société. Elles permettent d'évaluer la chance de gagner au Loto ; mais elles servent avant tout à quantifier un risque. Les assureurs évaluent la chance ( ou malchance ) d'avoir un accident de la route pour déterminer leurs tarifs ; le banquier calcule la probabilité d'être remboursé d'un prêt avant de l'octroyer ; le météorologue l'éventualité qu'il fasse beau demain, ...
Wendelin Werner lui s'intéresse aux marches aléatoires comme le mouvement d'un grain de pollen dans un liquide, ou la percolation de l'eau dans le café, ou encore l'apparition de phénomènes magnétiques dans les matériaux.
« *La physique n'est pas ma motivation première, mais elle fournit de beaux objets et de beaux problèmes mathématiques* », explique Wendelin Werner. Avec Greg Lawler et Oded Schramm, qui travaillent aux États-Unis, il a résolu un certain nombre de conjectures concernant la forme de ces chemins tortueux, leurs dimensions fractales ou leurs probabilités d'intersection.
En fait, en quelques années et articles, Lawler, Schramm et Werner ont donné des démonstrations précises à des problèmes dont les physiciens avaient formulé les réponses plusieurs années auparavant sans justifications mathématiquement rigoureuses...
« *Le truc a été de mélanger plusieurs outils venant des probabilités et aussi de l'analyse avec des nombres complexes* », se souvient Wendelin Werner. L'équipe s'est ainsi constituée peu à peu. « *Nous n'avons dû nous retrouver que quatre fois tous les trois ensemble. Nous travaillions par e-mail, en en échangeant parfois une dizaine par jour. Mais c'est aujourd'hui une méthode de travail classique* », précise le mathématicien, qui n'a donc pas du tout le profil du chercheur isolé.
« *Wendelin est quelqu'un de passionné, de très dynamique* », se souvient Jean-François Le Gall, son directeur de thèse à l'École Normale Supérieure.
Le jeune mathématicien souhaite maintenant s'attaquer à quelques problèmes restés sans réponse dans ce domaine qu'il a contribué à défricher. Il rêve aussi, « *sans que je sois sûr que ça marche* » , de jeter des ponts entre son domaine et d'autres en mathématiques.

## TERENCE TAO : LE JEUNE SURDOUÉ DES MATHÉMATIQUES

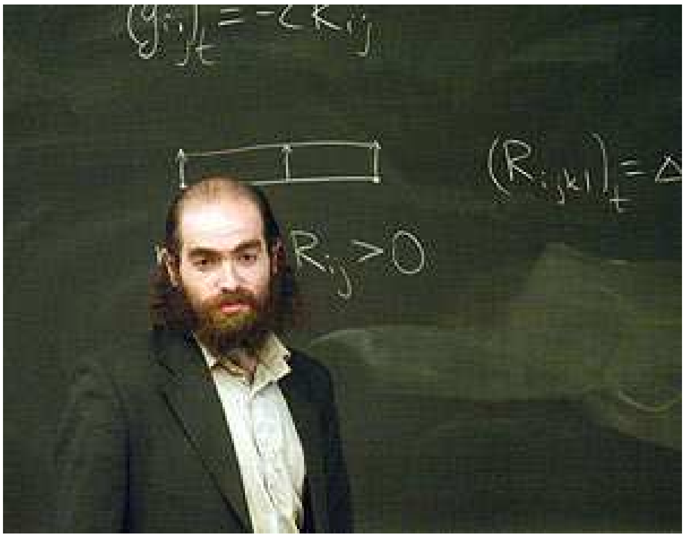
Terence Tao, 31 ans, est le plus jeune des mathématiciens récompensés en 2006 par la médaille Fields. Il est l'auteur de travaux originaux dans le domaine de l'analyse harmonique appliquée à l'arithmétique. Enfant prodige, Tao est né en Australie en 1976. Celui que l'on surnomme « le Mozart des maths »a appris à lire à 2 ans. Son père raconte qu'il aurait appris seul en regardant l'émission pour enfant « Rue Sesame ». Il suit les cours de l'université à 9 ans.
Il est le plus jeune participant aux Olympiades internationales de mathématiques, où il gagne la médaille de bronze en 1986, celle d'argent en 1987, puis l'or en 1988. Il a obtenu la médaille d'or à 13 ans tout juste, une performance jamais égalée depuis.



A 20 ans il termine son doctorat de mathématiques et devient professeur à l'Université de Californie de Los Angeles. Il reçoit le prix Salem en 2000 ; le prix Bôcher en 2002 ; le prix Clay en 2003 ; le prix de la Société Américaine de Mathématique en 2005 ; le prix Ramanujan en 2006 ...
« *C'est certainement le meilleur mathématicien au monde en ce moment. Un mathématicien tel qu'on en voit qu'un par génération.* » d'après un de ses collègues.
Tao travaille sur la répartition des **nombres premiers**. Il cherche des suites régulières de nombres premiers comme 5,11,17,23,29 ( où les nombres sont séparés de 6 unités ; on dit de raison 6 ) ou encore 7,37,67,97,127,157 ( suite de raison 30 ).
La plus longue de ces séquences connues aujourd'hui est constituée de 23 nombres premiers. Le plus petit est 56 211 383 760 397, sa raison est 44 546 738 095 860.
Le théorème de Terence Tao qui lui vaut la médaille Fields prouve qu'il existe de telles suites de nombres premiers aussi longues que l'on veut.
Sa démonstration a été accueillie avec enthousiasme par la communauté mathématique : « *Un résultat comme on n'en voit qu'un par décennie, une avancée majeure dans la compréhension des nombres premiers* ».
Terence Tao n'a certainement pas fini de faire parler de lui !

# Mathématiques d'aujourd'hui

## Grigori Perelman démontre La Conjecture de Poincaré



Qualifié de génie par la communauté scientifique, le Russe Grigori Perelman a refusé en août 2006 la médaille Fields, qui vient récompenser sa démonstration de la difficile et célèbre conjecture de Poincaré.

*« Nous avons le regret d'annoncer qu'il a refusé d'accepter la médaille »*, a déclaré un porte-parole du Congrès mondial des mathématiciens qui s'est ouvert à Madrid. Ce n'était jamais arrivé.

Grigori Perelman a qualifié la médaille Fields de récompense « *sans intérêt* ». Elle lui aurait pourtant permis de revendiquer un prix d'un million de dollars de l'Institut Clay de Mathématiques, à Cambridge, récompensant la résolution de la conjecture de Poincaré, l'une des « sept énigmes mathématiques du millénaire ».

### La conjecture de Poincaré

La conjecture de Poincaré qu'il vient de démontrer a été émise la première fois par le mathématicien français, Henri Poincaré, en 1904. Elle cherche a expliquer la nature profonde des formes qui nous entourent.

Un objet géométrique possède une dimension. Il s'agit d'un nombre entier qui indique combien de paramètres le caractérisent. Les segments sont de dimension 1 ; ils n'ont qu'une longueur et pas d'épaisseur. Les figures planes ( celle que l'ont fait au tableau ) sont de dimension 2 : elles ont une longueur et une largeur. Les solides sont de dimension 3 ; ils ont une longueur, une largeur et une hauteur. On parle parfois dans ce cas de 3D. On retrouve d'ailleurs ce nombre dans les unités de mesure ; les longueurs sont de dimension 1, on les mesure en $m$ ( c'est à dire $m^1$ ) ; les surfaces en $m^2$, les volumes en $m^3$...

Nous vivons dans un espace à 3 dimensions, cependant les volumes qui nous entourent ont des surfaces de dimension 2. En effet on peut les emballer dans du papier cadeau.

Bien que nous puissions pas le représenter, il est possible d'imaginer ( difficilement ) l'espace de dimension 4. Dans celui-ci les objets ont des « surfaces »de dimension 3. C'est cet espace étrange qui est le plus compliqué à étudier ; et paradoxalement, il s'agit de celui dans lequel nous vivons puisque comme le font les physiciens nous pouvons ajouter le temps à nos trois dimensions habituelles.

Cet espace temps est celui dans lequel l'univers se développe et sa compréhension géométrique est essentielle à l'analyse de son origine.

La branche des mathématiques qui étudie ces questions difficiles s'appelle **la topologie**. La topologie est une sorte de géométrie « molle »où deux objets sont considérés comme identiques si on peut déformer l'un en l'autre sans cassure. La sphère et le cube sont équivalent en ce sens ; mais pas l'anneau.

La conjecture de Poincaré concerne la classification des surfaces fermées de dimension 3. (celles qui permettent d'emballer les objets de la quatrième dimension !).

Depuis Poincaré les mathématiciens cherchent à lister toutes les surfaces de toutes les dimensions ( on appelle cela des variétés ). Le problème pour la dimension 2 est résolu depuis l'antiquité, pour les dimensions supérieure ou égale à 5 depuis 1961. La dimension 4, la plus difficile, est caractérisée depuis 1982. Seul le cas de la dimension 3 n'avait pas été résolu. C'est chose faite depuis 2006 grâce à Perelman. Il a fallu plus de 2 ans à un comité d'expert pour valider sa démonstration.

### La médaille Field

La Médaille Fields est la plus prestigieuse récompense en mathématiques. Elle est attribuée tous les quatre ans au cours du congrès international de mathématiques, à au plus quatre mathématiciens devant avoir moins de 40 ans. Les lauréats se voient attribués une somme de 1,3 millions de dollars. Depuis sa création les États-Unis dominent avec 13 médailles viennent ensuite la France avec 9 médailles puis la Russie et 5 médailles...

**Pourquoi n'y a-t-il pas de prix Nobel en mathématiques ?**

Une anecdote, très populaire chez les mathématiciens veut que la femme de Nobel ait eu une aventure avec un mathématicien ce qui expliquerait l'animosité de Nobel, et donc cet « oubli ». C'est en réalité la personnalité du grand mathématicien suédois Mittag-Leffler, un homme très imbu de sa personne, qui était en cause. Mittag Leffler était très bien introduit à la cour du roi de Suède, et supportait mal la réussite du chimiste Nobel. C'est cette inimitié mutuelle qui priva les mathématiques de prix Nobel ce qui conduit à la création de la médaille Fields en 1924.

Grigory Perelman est une personnalité étrange. A 40 ans, il refuse les honneurs et continue à vivre humblement avec sa mère dans un appartement de Saint-Petersburg. Il est d'ailleurs sans emploi depuis qu'il a quitté son laboratoire de recherche et vit avec ses moins de 100 € de pension mensuelle.

Interviewé dans la rue, Perelman a insisté sur le fait qu'il était indigne de toute cette attention et complètement indifférent à tout cela. *« Je crois juste que le public n'a rien d'intéressant à apprendre de moi. »*

Lorsqu'après plus de 10 ans de travail acharné, Perelman a finalement résolu ce problème, il a simplement signalé sa conclusion sur l'Internet, plutôt que de la publier dans une revue prestigieuse, ajoutant : *« Si quiconque s'intéresse à ma manière de résoudre ce problème, tout est là, libre à vous de vous en servir. J'ai publié tous mes calculs. C'est tout ce que je peux offrir au public. »*

# NOMBRES PREMIERS ET CODES SECRETS

*« La Mathématique est la reine des sciences*
*et l'Arithmétique est la reine des mathématiques. »*
*Carl Friedrich Gauss (1777-1855)*

L'arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés et relations entre les nombres entiers. Bien que très familiers, ces nombres révèlent des problèmes d'une immense difficulté. Parmi les nombres entiers on trouve **les nombres premiers** qui sont leurs fondations.

### LA RÉPARTITION DES NOMBRES PREMIERS

Un nombre est premier s'il possède deux diviseurs : 1 et lui-même.
0 n'est pas premier, 1 non plus : il n'est divisible que par lui-même. 2, 3, 5, 7 et 11 sont premiers. $4 = 2 \times 2$ n'est pas premier, on dit qu'il est **composé**. Il possède 3 diviseurs.
Les nombres premiers inférieurs à 1000 :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 |
| 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 |
| 97 | 101 | 103 | 107 | 109 | 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 |
| 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 |
| 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 | 281 |
| 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 | 349 | 353 | 359 |
| 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 |
| 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 |
| 509 | 521 | 523 | 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 |
| 599 | 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 |
| 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 | 733 | 739 | 743 |
| 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 | 809 | 811 | 821 | 823 | 827 |
| 829 | 839 | 853 | 857 | 859 | 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 |
| 919 | 929 | 937 | 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 |

La répartition des nombres premiers est étonnante. On sait depuis Euclide qu'il y en a une infinité. Cependant il existe 10 000 nombres entier consécutifs sans qu'aucun ne soit premier. (10 000 peut-être remplacé par le nombre de votre choix !).
Des formules donnant tous les nombres premiers sont cherchées depuis longtemps (voir article sur Terence Tao).

### LES NOMBRES DE FERMAT

Pierre de Fermat (1601-1665), un célèbre mathématicien toulousain, conjectura que tous les nombres entiers de la forme $2^{2^n} + 1$ étaient premiers. En son honneur on note $F_n$ ces nombres.
$F_0 = 3$ est premier, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ aussi. C'est ce qui incita Pierre de Fermat à généraliser ce résultat.
En 1732, cependant, Leonhard Euler montre que $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$. $F_5$ est composé.
Actuellement, on ne connaît que cinq nombres de Fermat premiers. On sait que de $F_5$ à $F_{32}$ aucun n'est premier. $F_{33}$ est le plus petit nombre de Fermat dont on ne sait pas s'il est premier.

Le plus grand nombre premier connu aujourd'hui a été découvert en septembre 2006. Il s'agit de $2^{32\,582\,657} - 1$. Il s'écrit avec 9 808 358 chiffres.
Un prix de 100 000 \$ est offert à celui qui découvrira un nombre premier ayant plus de 10 millions de chiffres.

### LA CRYPTOGRAPHIE

La recherche au sujet des nombres premiers est très active aujourd'hui. L'arithmétique est en effet la base de **la cryptographie** : la science des codes secrets. La confidentialité des communications militaires, la protection des achats en ligne sur internet et bien d'autres choses encore font appel à la cryptographie.

Un de ces systèmes utilise la difficulté à décomposer un grand nombre en produit de nombres premiers.
Connaissant deux grands nombres premiers, il est facile d'en faire le produit ( avec un ordinateur ). Réciproquement il n'existe pas aujourd'hui de méthode assez rapide pour décomposer un grand nombre. Cette faille mathématique permet de construire des codes secrets presque inviolables.

### CODES SECRETS À CLEFS PUBLIQUES

Albert et Bernard souhaitent communiquer de manière confidentielle en utilisant un moyen public comme Internet. Ils se sont mit d'accord sur une **Clef privée** : le nombre premier $C = 4\,115\,225\,038\,530\,863$
Le message à coder est le mot MATHEMATIQUES. Albert remplace chaque lettre par sa position dans l'alphabet. Il obtient $M = 13\,012\,008\,051\,301\,200\,917\,210\,519$. Il calcule ensuite $Z = C \times M$ (moins d'une seconde avec une calculatrice). Albert diffuse alors $Z$ à la vue de tous par mail ou sur son blog. Bernard de son côté effectue $Z \div C = M$ (moins d'une seconde) pour lire le message.
Tout autre lecteur espion du nombre $Z$ est incapable de retrouver $M$ sans connaître la clef privée $C$. En allongeant la clef privée (autour de 300 chiffres) on obtient un code inviolable.
A titre d'exemple, en 2006, il a fallu 11 mois et 400 ordinateurs à une équipe de chercheurs pour décomposer RSA-700, un nombre de 200 chiffres.
Le commerce électronique utilise aujourd'hui des clefs de 1024 *bit* (des nombres de 308 chiffres). 100 000\$ est offert à celui qui saura décomposer un tel nombre. Beaucoup estiment qu'il faudra attendre encore 5 à 10 ans pour y parvenir !

### PROBLÈMES OUVERTS ...

Il reste de nombreuses questions non résolues au sujet des nombres premiers.

LA CONJECTURE DE GOLBACH affirme que tout nombre entier pair est la somme de deux nombres premiers.
Formulée en 1742 elle se vérifie sur les petits entiers :
$22 = 19 + 3$, $64 = 61 + 3$, $2008 = 1031 + 977$.
On sait qu'elle est vraie pour tout nombre inférieur à $3 \times 10^{17}$ à la date du 26 décembre 2005.

On appelle NOMBRES PREMIERS JUMEAUX deux nombres premiers dont l'écart est 2, comme 3 et 5, 11 et 13 ou 617 et 619.
Existe-t-il une infinité de tel couple ?
Le plus grand couple est composé des nombres $2\,003\,663\,613 \times 2^{195\,000} - 1$ et $2\,003\,663\,613 \times 2^{195\,000} + 1$.
Ces nombres premiers jumeaux sont formés par une suite de 58 711 chiffres.

Existe-t-il une infinité de REP-UNIT PREMIER ?
Un rep-unit est un nombre qui ne s'écrit qu'avec des 1.
$R_2 = 11$ est premier. $R_1 = 1$ et $R_3 = 111$ ne le sont pas.
On connaît depuis 1985 5 rep-unit premiers : $R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317}$ et $R_{1031}$. $R_{49081}$ et $R_{86453}$ le sont probablement, ils sont en cours d'analyse.

Ces recherches qui paraissent étranges ont au moins deux intérêts : faire progresser la comprehension des nombres entiers et améliorer les algorithmes de calculs des ordinateurs.

# HISTOIRE

## SRINIVASA RAMANUJAN

Un matin de 1913, un célèbre mathématicien anglais, Godfrey H. Hardy, découvre dans son courrier une mystérieuse lettre en provenance d'Inde. Écrite dans un anglais approximatif elle est constituée de théorèmes et formules qui pour la plupart sont d'allure démente ou fantastique. L'éminent professeur anglais se désintéresse tout d'abord de la lettre puis dans un élan de curiosité l'examine avec son collègue John E. Littlewood.
Les deux hommes se rendent alors à l'évidence : l'auteur de ce manuscrit est un mathématicien de génie.

### UNE FORMULE EXTRAORDINAIRE

En 1910, il découvre cette expression :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \times \frac{1103 + 26390n}{(4 \times 99)^{4n}}}$$

Ramanujan ne donne aucune explication.
Il faut attendre jusqu'en 1985 pour que les frères Borwein en donne une justification.

Srinivasa Ramanujan naît le 22 décembre 1887 dans la ville d'Erode en Inde. Son enfance se passe sans encombres à Kumbakonam où il se fait déjà remarquer pour son excellente scolarité.
En 1903 Ramanujan entre en possession d'un livre qui sera décisif pour sa vie. Cet ouvrage n'est qu'un condensé de résultats mathématiques dans un grand nombre de branches sans aucune démonstration. Les mathématiques deviennent alors son unique intérêt.

Il y consacre trop de temps et néglige les autres matières, ce qui lui vaut la suppression de sa bourse d'étude.
En 1906, il retourne au lycée pour un examen d'entrée à l'université. Il assiste quelques mois aux cours puis tombe malade. Au cours de l'examen, il réussit seulement en maths et échoue partout ailleurs, ce qui lui interdit l'entrée à l'université.
Dans les années qui suivent, il continue alors de développer seul ses idées, sans aucune aide extérieure et sans connaissance des thèmes de recherche possibles.
Voici comment le décrit un professeur indien :
*« Une silhouette grossière, corpulente, le visage mal rasé, pas très propre, avec un regard brillant très frappant, s'avança avec un cahier usé jusqu'à la corde sous le bras. Il était extrêmement pauvre. Il ouvrit son cahier et commença d'expliquer quelques unes de ses découvertes. Je vis presque immédiatement qu'il y avait quelque chose d'extraordinaire mais mes connaissances ne me permirent pas de juger s'il avait raison ou pas. Je lui demandai ce qu'il désirait. Il dit qu'il voulait un petit revenu pour vivre afin de pouvoir poursuivre ses recherches. »*
C'est sur les conseil d'amis mathématiciens que Ramanujan rédige en janvier 1913 cette fameuse lettre à l'attention de Hardy.

Hardy et Littlewood ne tardent pas à contacter Ramanujan et lui demande de les rejoindre en Angleterre. Il n'a pas été facile de le convaincre.
Ramanujan était issu d'une famille brahmane de caste élevée, dans laquelle la pratique religieuse occupait une place primordiale. Ramanujan était un pratiquant assidu. Sa mère, qui était plus stricte encore, refusait catégoriquement à ce que son fils enfreigne l'interdit de voyager en mer.
Ramanujan rejoint cependant l'Angleterre en 1914 afin d'y débuter son exceptionnelle collaboration avec Hardy.

Hardy était profondément admiratif du génie naturel de Ramanujan. Il éprouvait cependant un sentiment de regret. Hardy considérait que c'est entre 18 et 25 ans qu'un mathématicien est le plus prolifique. Chez Ramanujan, il s'agit de la période durant laquelle il a été rejeté de l'université et n'a pu suivre de formation correcte.
Littlewood et Hardy ont donc pris en charge le jeune homme dès son arrivée à Cambridge, afin de le former dans les branches qui lui faisaient défaut.
La tâche n'a pas toujours été facile, notamment pour Littlewood qui a dû affronter l'avalanche de questions originales de Ramanujan à chaque fois qu'il apprenait un nouveau concept.
De plus, les méthodes de travail de Ramanujan n'étaient pas très habituelles. Ceci se traduit par une négligence quasi totale de démonstration, ce qui est illustré par cette citation de Littlewood :
*« Il ne possédait peut-être pas du tout l'idée de ce qui est signifié par une démonstration, notion si familière aujourd'hui qu'elle est considérée comme acquise ; si un bout signifiant de raisonnement lui venait quelque part à l'esprit, et que, globalement, le mélange entre intuition et évidence lui donnait quelque certitude, il n'allait pas plus loin. »*
Durant son premier hiver anglais, Ramanujan tombe malade ; il supporte mal le climat.
En 1918, Ramanujan est élu membre de la « Cambridge Philosophical Society ». Trois jours plus tard, probablement le plus grand honneur de toute sa carrière, son nom apparaît sur la liste des élections des membres de la « Royal Society of London ».
Il meurt l'année suivante, le 22 Avril 1920, à l'âge de 32 ans, probablement à cause de graves carences alimentaires.

Ramanujan a laissé un grand nombre de cahiers non-publiés, remplis de théorèmes que les mathématiciens continuent d'étudier. Aujourd'hui, ses travaux ont des applications dans les codes de calculs des décimales de $\pi$, ainsi qu'en physique théorique.
Le legs de Ramanujan aux mathématiques est un des plus importants mais des plus difficiles. Il est d'autant plus admirable si l'on repense au contexte dans lequel Ramanujan a grandi ; l'Inde du début du siècle dernier et ses problèmes de santé qui ne l'ont pas empêché de s'investir totalement dans la recherche mathématique.